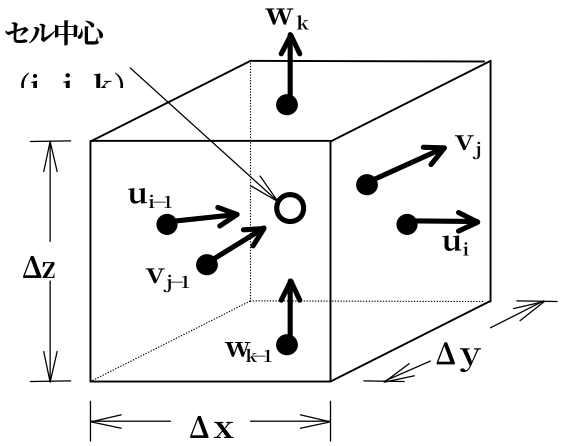
3.論理編

論理編では気流解析君の理論について説明します。

3.1 数値解法

気流解析君の計算手法には『差分法』を用いている事は操作解説書でも触れた通りですが、ここでは計算法としての差分法での解析手法を説明します。



Δx	：X方向メッシュ幅
Δy	：Y方向メッシュ幅
Δz	：Z方向メッシュ幅
u_i	：X方向ｉ番目メッシュ速度
v_j	：Y方向ｊ番目メッシュ速度
w_k	：Z方向ｋ番目メッシュ速度
セル中心	：圧力P、温度T、汚染濃度C、乱流エネルギーｋ、等

図 2.1.1　　３次元差分メッシュと物理量

気流解析君で編集したメッシュを取り出し、その中で各物理量がどこで定義されているか示したのが図 2.1.1 です。操作解説書Ｐ７７でも触れたように流速についてはセルの辺で、その他の物理量についてはセル中心で定義されています。

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x_i}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow \frac{P_{i+1} - P_i}{\left(\Delta x_i + \Delta x_{i+1}\right)/2}$$

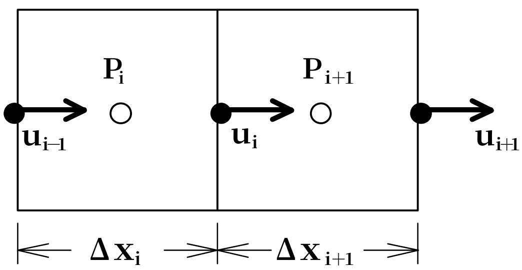


図 2.1.2　　方程式の差分化

流体では偏微分方程式を数値的に解く事になりますが、図 2.1.2 の様に偏微分をたし算や引き算に『差分化』して計算します。偏微分方程式すなわち理論式は差分式のメッシュ幅が０に非常に近い場合とも考えられるので、メッシュを小さく切る事はより理論式に近づける事になり、メッシュを多く切る事で精度が上がるのはこのためです。

差分法の中でもいくつかの手法があり、気流解析君では、時間微分の精度を上げるAdams-Bashforth 法、対流項の流れの影響を風上側に対応させる風上差分法、その他の項には中心差分法を用いています。

3.2 層流

気流解析君の流れ場計算の基本となる非圧縮性流体の連続方程式と運動方程式について解説します。

〈連続方程式〉

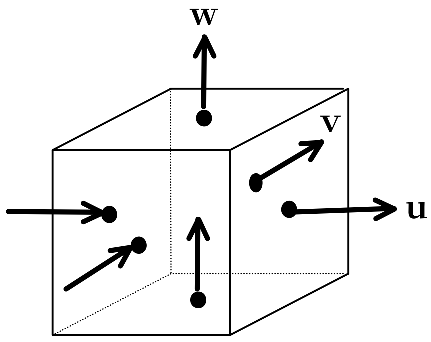


図 2.2.1　　微小領域の質量の出入

非圧縮性流体の場合図 2.2.1 の様な微小領域の質量の出入は

$$\nabla \cdot r\mathrm{u} = 0$$

各成分に展開すれば

$$\frac{\P(r\mathrm{u})}{\P\mathrm{x}} + \frac{\P(r\mathrm{v})}{\P\mathrm{y}} + \frac{\P(r\mathrm{w})}{\P\mathrm{z}} = 0$$

更にρ＝一定であるから

$$\frac{\P\mathrm{u}}{\P\mathrm{x}} + \frac{\P\mathrm{v}}{\P\mathrm{y}} + \frac{\P\mathrm{w}}{\P\mathrm{z}} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots$$

(3.2.1)

<u>記号の意味</u>

u	：X方向流速
v	：Y方向流速
w	：Z方向流速
ρ	：密度
u	：流速ベクトル

〈運動方程式〉

一般的な物理量をφとすれば輸送方程式は次の様に表わされます。

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w\phi)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+S$$

X方向運動方程式はφの代わりに速度u、拡散係数Γの代わりに粘性係数μ、生成項Sには $-\frac{\partial P}{\partial x}$ を代入する事で得られます。

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{\partial P}{\partial x}$$

両辺ρで割り、整理すれば

$$\frac{\partial(u)}{\partial t}+\frac{\partial(v^2)}{\partial x}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}+\frac{\partial(uw)}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad \cdots\cdots \quad (3.2.2)$$

但し、 $\nu=\frac{\mu}{\rho}$

Y、Z方向も同様に

$$\frac{\partial(v)}{\partial t}+\frac{\partial(uv)}{\partial x}+\frac{\partial(v^2)}{\partial y}+\frac{\partial(vw)}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad \cdots\cdots \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial(w)}{\partial t}+\frac{\partial(uw)}{\partial x}+\frac{\partial(vw)}{\partial y}+\frac{\partial(w^2)}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad \cdots\cdots \quad (3.2.4)$$

<u>記号の意味</u>

φ	：一般的な物理量（特に指定しない物理量）
Γ	：拡散係数（膨張係数）
S	：生成項（圧力勾配等）
μ	：粘性係数
ν	：動粘性係数

3.3 乱流

k－εモデルより求められた渦粘性係数ν$_T$を動入する事により、層流で用いた運動方程式を以下の様に書き変えて使用します。

〈X方向運動方程式〉

$$\frac{\partial(u)}{\partial t}+\frac{\partial\left(u^{2}\right)}{\partial x}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}+\frac{\partial(uw)}{\partial z}$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\nu+\nu_{T})\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{(\nu+\nu_{T})\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\nu+\nu_{T})\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\} \cdots\cdots \quad (3.3.1)$$

〈Y方向運動方程式〉

$$\frac{\partial(v)}{\partial t}+\frac{\partial(uv)}{\partial x}+\frac{\partial\left(v^{2}\right)}{\partial y}+\frac{\partial(vw)}{\partial z}$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\nu+\nu_{T})\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{(\nu+\nu_{T})\left(2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\nu+\nu_{T})\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\} \cdots\cdots \quad (3.3.2)$$

〈Z方向運動方程式〉

$$\frac{\partial(w)}{\partial t}+\frac{\partial(uw)}{\partial x}+\frac{\partial(vw)}{\partial y}+\frac{\partial\left(w^{2}\right)}{\partial z}$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{(\nu+\nu_{T})\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{(\nu+\nu_{T})\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\nu+\nu_{T})\left(2\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\} \cdots\cdots \quad (3.3.3)$$

〈乱流エネルギーｋの輸送方程式〉

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial (uk)}{\partial x}+\frac{\partial (vk)}{\partial y}+\frac{\partial (wk)}{\partial z} \\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial z}\right)+\nu_T\left[2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}\right. \\
&\quad+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial x} \\
&\quad\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial v}{\partial z}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial y}\right]-\varepsilon \qquad \cdots\cdots \quad (3.3.4)
\end{aligned}
$$

〈消散率εの輸送方程式〉

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial (u\varepsilon)}{\partial x}+\frac{\partial (v\varepsilon)}{\partial y}+\frac{\partial (w\varepsilon)}{\partial z} \\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)+C_1\frac{\varepsilon}{k}\left[2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}\right. \\
&\quad+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} \\
&\quad\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial v}{\partial z}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial y}\right]-C_2\frac{\varepsilon^2}{k} \qquad \cdots\cdots \quad (3.3.5)
\end{aligned}
$$

〈渦粘性係数〉

$$\nu_T = C_D\frac{k^2}{\varepsilon} \qquad \cdots\cdots \quad (3.3.6)$$

記号の意味

基礎実験を通して求められている係数の値として以下を用いる

C_1 ＝１．４４

C_2 ＝１．９２

C_D ＝０．０９

σ_k ＝１．０

σ_ε ＝１．３

3.4 熱輸送

自然対流問題はエネルギー方程式とＺ方向運動方程式を連立して解く事で表現しています。

〈エネルギー方程式〉

流体の運動が熱等の内部エネルギーに比較して無視できる低速流である事と、粘性による散逸が他の項に比較して十分小さい事を前提とすれば、エンタルピhの輸送方程式を導く事が出来ます。定圧比熱C_Pを用いてhを

$$h = C_P T$$

と表現すれば輸送方程式は次式の様になります。

$$\frac{\P\left(rC_P T\right)}{\P t}+\frac{\P\left(ruC_P T\right)}{\P x}+\frac{\P\left(rvC_P T\right)}{\P y}+\frac{\P\left(rwC_P T\right)}{\P z}=\frac{\P}{\P x}\left(l\,\frac{\P T}{\P x}\right)+\frac{\P}{\P y}\left(l\,\frac{\P T}{\P y}\right)+\frac{\P}{\P z}\left(l\,\frac{\P T}{\P z}\right)$$

非圧縮性流体であるからC_P＝一定として式を整理すれば

$$\frac{\P T}{\P t}+\frac{\P\left(uT\right)}{\P x}+\frac{\P\left(vT\right)}{\P y}+\frac{\P\left(wT\right)}{\P z}=\frac{l}{rC_P}\left(\frac{\P^2 T}{\P x^2}+\frac{\P^2 T}{\P y^2}+\frac{\P^2 T}{\P z^2}\right) \qquad (3.4.1)$$

<u>記号の意味</u>

C_P　：定圧比熱
λ　：熱伝導率
h　：エンタルピ
T　：温度

〈Ｚ方向運動方程式〉

流体中に温度差が存在する時は運動方程式に浮力の影響を取り込まなければなりません。これをブーシネスク近似で表現して、（2.2.4）式に浮力項を加えれば

$$\frac{\P w}{\P t}+\frac{\P\left(uw\right)}{\P x}+\frac{\P\left(vw\right)}{\P y}+\frac{\P\left(w^2\right)}{\P z}$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{\P P}{\P z}+n\left(\frac{\P^2 w}{\P x^2}+\frac{\P^2 w}{\P y^2}+\frac{\P^2 w}{\P z^2}\right)+bg\left(T-T_0\right) \qquad (3.4.2)$$

<u>記号の意味</u>

β　：体膨張係数
g　：重力加速度
T_0　：入口温度

3.5 汚染濃度拡散

汚染濃度の拡散は，既に求めた流速を用いて対流拡散方程式を解きます。

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial \left(uC\right)}{\partial x}+\frac{\partial \left(vC\right)}{\partial y}+\frac{\partial \left(wC\right)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial C}{\partial z}\right) \tag{3.5.1}$$

<u>記号の意味</u>

C　　：汚染濃度
D　　：拡散係数